

南京大学 2023 级本科生“拔尖计划”计算机科学基地选拔考试

主观题（数学、算法）部分

考试日期 2023 年 9 月 4 日 考试方式 闭 卷 院系或专业大类 _____

学 号 _____ 姓 名 _____ 成 绩 _____

题 号	数学—1	数学—2	数学—3	数学—4	算 法
得 分					

注意：1、主观题总分 100 分，答题时间 180 分钟，请将解答写在试题后的空白处，要写清过程。

2、如果不会，请直接写“放弃”，每题可得 2 分；写伪证误导阅卷老师，得 0 分甚至负分。

得分	
----	--

 数学—1（本题满分 20 分）

开始时，黑板上写了 2023 个 1. 然后，你可以采取 2022 次操作，其中每次操作如下：从黑板上任意选择两个数 a 、 b ，擦去这两个数，把 $a + b$ 或者 $\min(a^2, b^2)$ 写在黑板上. 最后黑板上剩下的数的最大值为 r .

求证： $2^{\frac{2023}{3}} < r < 3^{\frac{2023}{3}}$.

得分	
----	--

数学—2（本题满分 20 分）

假设 f 是一个函数，其定义域是所有非 0 实数构成的集合，而其函数值也总是实数. 对于任意满足 $xyz = 1$ 的实数 x 、 y 、 z ，总是有 $f(x)^2 - f(y)f(z) = x(x + y + z)(f(x) + f(y) + f(z))$. 求所有满足条件的 f .

得分	
----	--

数学—3（本题满分 20 分）

假设 n 和 k 均为大于 3 的正整数. 令集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$. 如果定义域、值域均为 S 的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意 $x \neq y$, 必有 $f(x) \neq f(y)$, 那么我们就称 $f(x)$ 为 S 的一个排列函数. 对于 S 的一个排列函数 $f(x)$, 任何一个形如 $\{x, f(x), f(f(x)), \dots\}$ 的集合称为它的一个轨道. 而 $f(x)$ 所拥有的不同轨道的数量则记作 $c(f)$. 例如 $\{1, 2, 3\}$ 上的一个排列函数 $f(x)$ 使得 $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3$, 那么 $f(x)$ 拥有两个轨道 $\{1, 2\}$ 和 $\{3\}$, 所以 $c(f) = 2$. 现在考虑 S 的 k 个排列函数 $f_1, f_2, \dots, f_k$, 定义它们的复合函数 $f(x) = f_1(f_2(\dots f_k(x)))$.

求证: $c(f_1) + c(f_2) + \dots + c(f_k) \leq n(k-1) + c(f)$.

得分	
----	--

数学—4 (本题满分 20 分)

正整数 n 恰好一共有 k 个因子. 这些因子可以按照某种顺序排列为 $d_1, d_2, \dots, d_k$, 使得对于 $i = 1, 2, \dots, k$, 我们都有: $d_1 + d_2 + \dots + d_i$ 恰好等于某个整数的平方. 求正整数 n 所有可能的值.

得分	
----	--

算法（本题满分 20 分）

考虑 1 亿个点组成的集合 $S = \{(x, y) \mid x \text{ 和 } y \text{ 均为不超过 1 万的正整数}\}$. 函数 f 以 S 为定义域, 以 $\{1, 2, 3\}$ 为值域. 已知 S 中存在三点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) , 满足 $f(x_1, y_1) = 1, f(x_2, y_2) = 2, f(x_3, y_3) = 3$. 我们的目标是寻找三个点 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) , 满足 $f(a_1, b_1)f(a_2, b_2)f(a_3, b_3) = 6$, 并且以 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) 为顶点的三角形恰好是直角三角形. 请设计一个算法: 算法的输入为 f 的 1 亿个函数值 (因此该算法知道 f 在任意给定点上的值), 算法的输出是满足以上要求的三个点 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) . 假设每次加减乘除或者比较大小的操作都需要 1 个单位的时间, 你的算法运行的时间不得超过 20 亿个单位.

【注意 1: 算法题不是编程题, 你不需要使用编程语言, 更不需要关心实现上的细节. 然而, 你需要让阅卷老师能够理解你的算法。】

【注意 2: 你的算法不准失败, 而且输出必须保证满足要求. 如果这些不是显然的, 那么你应该予以解释。】

