Módulo ou valor absoluto de um número

Façamos uma breve revisão do conceito de módulo de um número.

Se tivermos a reta real e nela os pontos A e B de abcissas 5 e -7, respetivamente (Figura 1), constatamos que a distância de A à origem é 5 e que a distância de B à origem é 7 (Relembra que não existem distâncias negativas). Essa distância é o **módulo** ou **valor absoluto** do número e representa-se por $|\ldots|$.

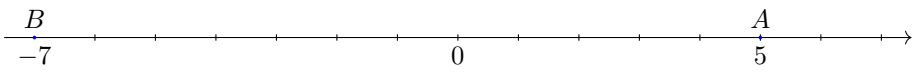

Figura 1

- A distância de A à origem é 5, ou seja, $|5| = 5$.
- A distância de B à origem é 7, ou seja, $|-7| = 7$.

Em geral:

Número	-10	-6	0	100	$\ldots$	x
Módulo ou valor absoluto	10	6	0	100	$\ldots$	$\lvert x\rvert$

Assim, **se x é um número positivo ou zero, o seu módulo é ele próprio. Contudo, se x for um número negativo, o seu módulo é o seu simétrico**.

Assim, pode definir-se o módulo de um número da seguinte forma:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Note-se que $-x$ não significa que se trata de um número negativo, mas sim do simétrico de x. Por exemplo, se $x = -5$, então $-x = -(-5) = 5$. Neste caso $|x| = -x$, ou seja $|-5| = 5$.

Função módulo

Consideremos a função real de variável real definida por $f(x) = |x|$ **à qual se designa por função módulo**.

Note-se que $D_f = \mathbb{R}$.

A função f pode assim ser definida como uma **função definida por ramos** da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico da função módulo pode ser definido por duas semirretas já conhecidas: uma contida na bissetriz dos quadrantes pares e a outra na bissetriz dos quadrantes ímpares.

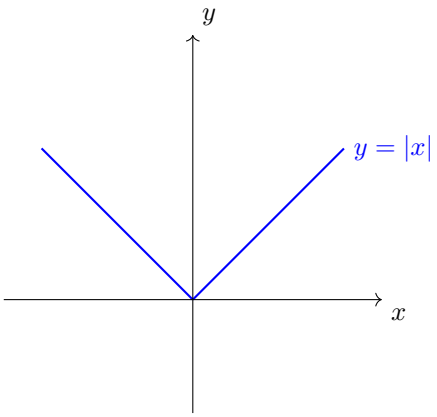

Figura 2

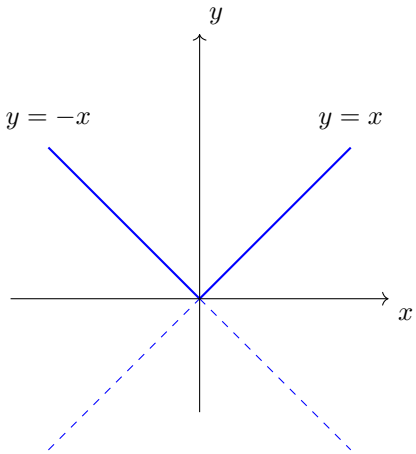

Figura 3

Sabemos que um módulo é sempre não negativo e isso vê-se, claramente, no gráfico da função módulo cujo contradomínio é $[0;\ +\infty[$.

Na calculadora gráfica (TI - Figuras 4 e 5; Casio - Figuras 6, 7 e 8) para se obter o gráfico da função módulo faz-se o seguinte:

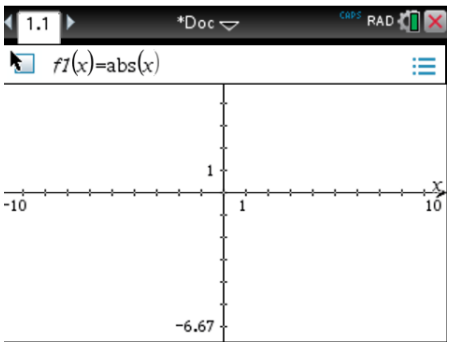

Figura 4

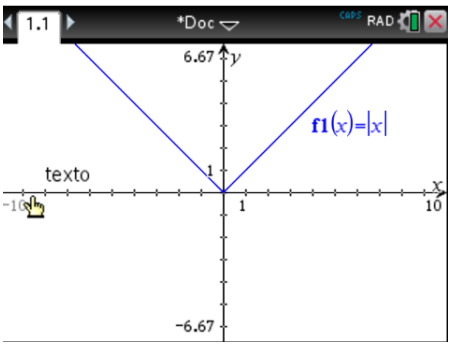

Figura 5

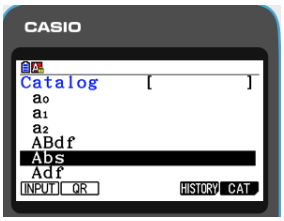

Figura 6

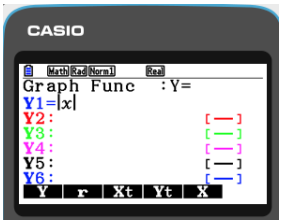

Figura 7

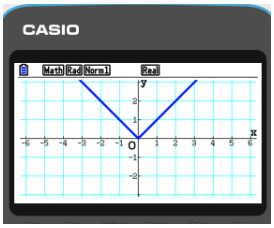

Figura 8

Todas as transformações de funções estudadas anteriormente são também válidas para a função módulo.

Assim, vamos representar graficamente algumas funções e indicar o domínio, o contradomínio e os zeros.

✓ $y = |x| + 2$

O gráfico de $y = |x| + 2$ é obtido a partir do gráfico de $y = |x|$ por uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0;\ 2)$.

- $D = \mathbb{R}$
- $D' = [2;\ +\infty[$
- $|x| + 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = -2$

  Como a condição $|x| = -2$ é impossível, a função não tem zeros.

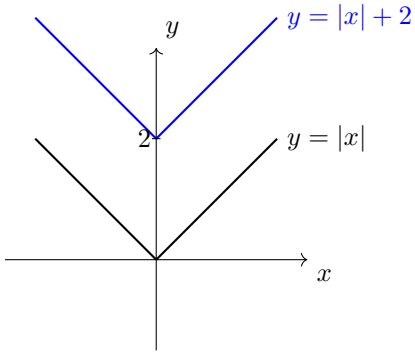

Figura 9

Se quiséssemos definir esta função por ramos, ficaria:

$$y = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

✓ $y = |x| - 3$

O gráfico de $y = |x| - 3$ é obtido a partir do gráfico de $y = |x|$ por uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0;\ -3)$.

- $D = \mathbb{R}$
- $D' = [-3;\ +\infty[$
- $|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

  Zeros: $\{-3;\ 3\}$

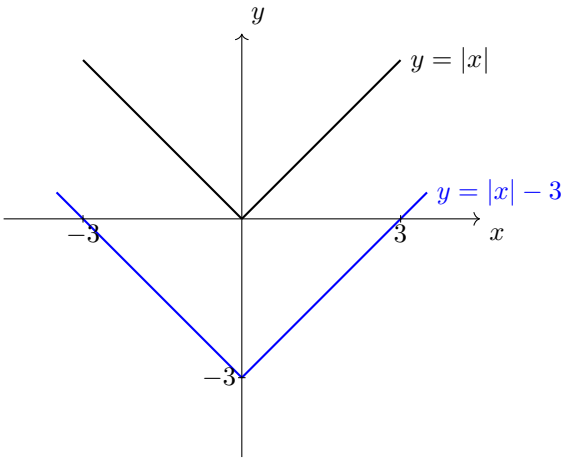

Figura 10

Se quiséssemos definir esta função por ramos, ficaria:

$$y = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

✓ $y = |x - 4|$

O gráfico de $y = |x - 4|$ é obtido a partir do gráfico de $y = |x|$ por uma translação associada ao vetor $\vec{u}(4;\ 0)$.

- $D = \mathbb{R}$
- $D' = [0;\ +\infty[$
- $|x - 4| = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

  Zeros: $\{4\}$

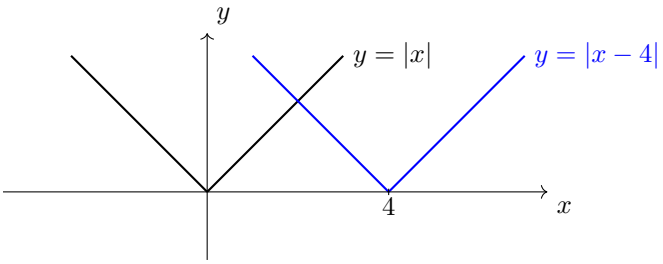

Figura 11

Se quiséssemos definir esta função por ramos, ficaria:

$$y = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x - 4 \geq 0 \\ -x + 4 & \text{se } x - 4 < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$y = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

✓ $y = |x - 1| - 2$

O gráfico de $y = |x - 1| - 2$ é obtido a partir do gráfico de $y = |x|$ por uma translação associada ao vetor $\vec{u}(1;\ -2)$.

- $D = \mathbb{R}$
- $D' = [-2;\ +\infty[$
- $|x - 1| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x - 1| = 2$
  $\Leftrightarrow x - 1 = 2 \vee x - 1 = -2 \Leftrightarrow$
  $x = 3 \vee x = -1$

  Zeros: $\{-1;\ 3\}$

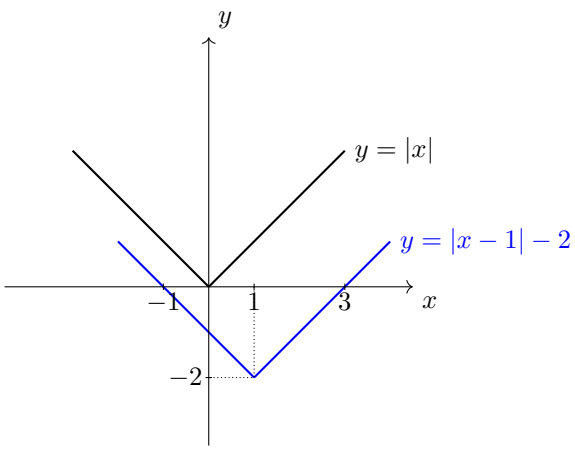

Figura 12

Para definir esta função por ramos começa-se por definir a função $y = |x-1|$.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ se } x-1 \geq 0 \\ -x+1 \text{ se } x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ se } x \geq 1 \\ -x+1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Logo,

$$|x-1|-2 = \begin{cases} x-1-2 \text{ se } x \geq 1 \\ -x+1-2 \text{ se } x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \text{ se } x \geq 1 \\ -x-1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

✓ $y = -|x| + 5$

O gráfico de $y = -|x| + 5$ é obtido a partir do gráfico de $y = |x|$ por uma reflexão de eixo Ox seguida de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0;\ 5)$.

- $D = \mathbb{R}$
- $D' =]-\infty;\ 5]$
- $-|x| + 5 = 0 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$

  Zeros: $\{-5;\ 5\}$

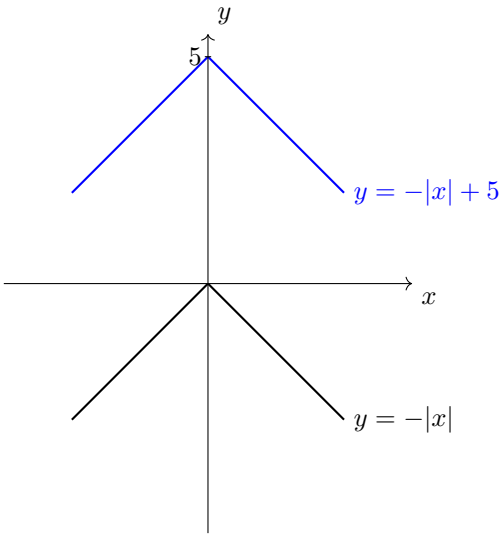

Figura 13

Para definir esta função por ramos começa-se por definir a função $y = -|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -|x| = \begin{cases} -x \text{ se } x \geq 0 \\ x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Logo,

$$y = -|x|+5 = \begin{cases} -x+5 \text{ se } x \geq 0 \\ x+5 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

✓ $y = 2|x+1|$

O gráfico de $y = 2|x+1|$ é obtido a partir do gráfico de $y = |x|$ por uma uma translação associada ao vetor $\vec{u}(-1;\ 0)$ seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 2.

- $D = \mathbb{R}$
- $D' = [0;\ +\infty[$
- $2|x+1| = 0 \Leftrightarrow |x+1| = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

  Zeros: $\{-1\}$

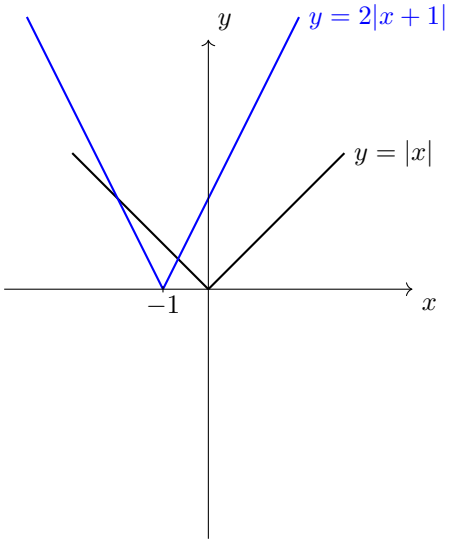

Figura 14

Para definir esta função por ramos começa-se por definir a função $y = |x+1|$.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 \ \text{ se } \ x+1 \geq 0 \\ -x-1 \ \text{ se } \ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+1| = \begin{cases} x+1 \ \text{ se } \ x \geq -1 \\ -x-1 \ \text{ se } \ x < -1 \end{cases}$$

Logo,

$$y = 2|x+1| = \begin{cases} 2(x+1) \ \text{ se } \ x \geq -1 \\ 2(-x-1) \ \text{ se } \ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow 2|x+1| = \begin{cases} 2x+2 \ \text{ se } \ x \geq -1 \\ -2x-2 \ \text{ se } \ x < -1 \end{cases}$$

O gráfico da função $y = a|x-b| + c$ obtém-se a partir do gráfico de $y = |x|$ aplicando-lhe uma translação de vetor $\vec{u}(b;\ 0)$ seguida de:

- uma dilatação vertical de coeficiente $|a|$ se $|a| > 1$;
- uma contração vertical de coeficiente $|a|$ se $|a| < 1$;
- uma reflexão de eixo ox se $a < 0$;
- uma translação de vetor $\vec{v}(0;\ c)$.

E se quisermos fazer o esboço da função $f(x) = |x^2 - 4|$?

Começa-se por desenhar a função $y = x^2 - 4$.

Sabe-se que o módulo de um número positivo é o próprio número, logo, a parte positiva da função mantém-se.

O módulo de um número negativo é o seu simétrico. Assim, a parte negativa da função *terá de passar* para o simétrico em relação ao eixo Ox.

Fica então:

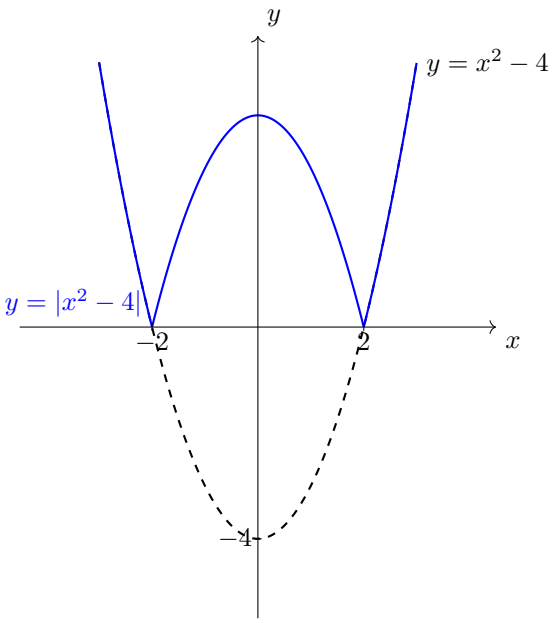

Figura 15