

2020 信息强基/计算机拔尖选拔考试-数学

报考志愿（二选一）：拔尖计划 ☐ 强基计划 ☐

学号：	姓名：	院系：		
数学-1 得分：	数学-2 得分：	数学-3 得分：	数学-4 得分：	数学总分：

【说明】本卷 4 题，共 80 分，考试时间 150 分钟。闭卷考试，严禁携带任何资料或使用任何电子设备。

【数学-1】【20 分】假设有一组 n 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 以及另外一组 n 个实数 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。

现在根据这两组实数定义一个 n 行 n 列的方阵 A : 如果 $x_i + y_j \geq 0$, 那么 A 在第 i 行第 j 列上的

元素 $A_{ij} = 1$; 否则, $A_{ij} = 0$ 。假设 B 是另外一个 n 行 n 列的方阵, 其每个元素都等于 0 或者 1,

并且其每行元素的和都等于 A 的对应行元素的和, 其每列元素的和也都等于 A 的对应列元素的和。求证 $A=B$, 亦即 A 的每个元素都等于 B 的对应元素。

【如果不会, 请直接写“放弃”; 写伪证误导阅卷老师, 可能会得负分。最低可得-5 分。】

【数学-2】【20 分】如果 k 是正整数，而一个以正整数集为定义域和值域的函数 f 满足：对于任意正整数 n ， $f^k(n) = n^k$ ，那么 f 就被称为一个 k -灾难函数。[回忆 f^k 的定义如下： $f^2(n) = f(f(n))$ ；对于 $k > 2$ ， $f^k(n) = f^{k-1}(f(n))$ 。] 对于哪些正整数 k ， k -灾难函数存在？请证明你的结论。

【如果不会，请直接写“放弃”；写伪证误导阅卷老师，可能会得负分。最低可得-5 分。】

【数学-3】【20 分】对于任意正整数 x , 用 $F(x)$ 表示 x 的质因子中最大的一个。例如 $F(12)=3$, $F(100)=5$, $F(2020)=101$ 。对于不相等的两个质数 p 和 q , 如果不存在正整数 n 使得 $F(n)=p$ 且 $F(n+1)=q$, 那么我们就说有序质数对 (p,q) 是好的。求证: 存在无穷多个好的有序质数对。

【如果不会, 请直接写“放弃”; 写伪证误导阅卷老师, 可能会得负分。最低可得-5 分。】

4. 【20 分】 在直角坐标平面上，存在有限多堵墙。这里的一堵墙其实就是一条线段。任意两堵墙都互不相交，任意一堵墙都不与任何坐标轴平行。一个动点从任意位置出发，沿着 $+x$ 方向移动。每当该动点撞上一堵墙，它的运动方向就改变 90° 度（所以它总是在平行于某个坐标轴的方向移动）。请注意，它改变运动方向时，并不能穿越墙，只能被墙“弹开”。求证：该动点的整个运动过程中，绝对不可能撞上每一堵墙的两面。

【如果不会，请直接写“放弃”；写伪证误导阅卷老师，可能会得负分。最低可得-5 分。】