

2022 计算机拔尖选拔—主观题

总分 80 分，答题时间 150 分钟

【如果不会，请直接写“放弃”，每题可得 2 分；写伪证误导阅卷老师，得 0 分甚至负分】

【数学-1】【20 分】假设 n 是一个大于 1 的自然数。现在，我们想把 n 的所有约数写出来，排成一个圆圈。在这个圆圈中，任何两个相邻的数都必须恰好只差一个素因子：也就是说，必然存在一个素数 p ，使得这两个相邻的数分别等于 x 和 px 。请问对于什么样的 n ，我们能够找到一种满足要求的写法？证明你的结论。

【数学-1 答案】这里的 n 必须含有至少两个素因子(也就是说不能是素数的幂)，并且不能是完全平方数。

如果 n 是素数的幂，非常容易证明无法满足要求。如果 n 是完全平方数，那么我们把 n 的每个约数 $m = p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}$ (这里每个 p_i 都是素数) 染色：如果 $d_1 + \dots + d_k$ 为偶数，则染白色；如果 $d_1 + \dots + d_k$ 为奇数，则染黑色。容易发现，在圆圈上相邻的两个数必然不同色，所以圆圈上黑色数和白色数的总数相等。因此，圆圈上必然有偶数个数，亦即 n 有偶数个约数，这与 n 是完全平方数相矛盾。

如果 n 含有至少两个素因子，并且不是完全平方数，我们使用归纳法来构造一个圆圈。当 $n = p^c q^d$ (这里 p 和 q 都是素数) 时，由于 n 不是完全平方数， c 和 d 中必有一个奇数。不妨设 c 为奇数。则圆圈上的排列为：1, $q, q^2, \dots, q^d, pq^d, pq^{d-1}, \dots, pq, p^2q, p^2q^2, \dots, p^2q^d, p^3q^d, p^3q^{d-1}, \dots, p^3q, \dots, p^{c-1}q, p^{c-1}q^2, \dots, p^{c-1}q^d, p^c q^d, p^c q^{d-1}, \dots, p^c q, p^c, p^{c-1}, p^{c-2}, \dots, p, 1$ 。

当 $n = p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}$ 有 $k \geq 3$ 个因子，由于 n 不是完全平方数，不妨设 d_k 为奇数。我们对 $r = p_1^{d_1} \dots p_{k-1}^{d_{k-1}}$ 使用归纳假设，得到一个包含 r 的所有约数的圆圈。不妨设在这个圆圈上，1 和 p_1 相邻。用 A 表示从 1 开始，遍历圆圈上所有数后回到 p_1 的序列。用 B 表示完全相反顺序的序列。符号 $p_k B$ 则表示把 p_k 乘以 B 中每一个数得到的序列。于是，我们为 n 构造一个新的圆圈如下： $A, p_k B, p_k^2 A, p_k^3 B, \dots, p_k^{d_k-1} A, p_k^{d_k} B, p_k^{d_k-1}, p_k^{d_k-2}, \dots, p_k, 1$ 。

【数学-2】【20 分】假设 f 是定义在整数集上的函数，其函数值也都是整数，并且满足 $f(x-f(y))=f(f(x))-f(y)-1$ 。又已知 $f(1)$ 和 $f(2)$ 都不是该函数的最大值。求所有满足条件的函数 f 。

【数学-2 答案】

Consider the original equation

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1. \quad (1)$$

Replacing y with $f(x)$, we get that

$$f(x - f(f(x))) = -1. \quad (2)$$

Now we know there exists a such that $f(a) = -1$. Replacing y with a in Equation (1), we have

$$f(x + 1) = f(x - f(a)) = f(f(x)) - f(a) - 1 = f(f(x)). \quad (3)$$

On the other hand, when we replace x with $f(y)$ in Equation (1), we get that

$$f(0) = f(f(f(y))) - f(y) - 1 \Rightarrow f(f(f(y))) - f(y) = f(0) + 1. \quad (4)$$

Combining Equations (3) and (4), we have

$$f(f(y + 1)) - f(y) = f(0) + 1 \Rightarrow f(y + 2) - f(y) = f(0) + 1. \quad (5)$$

The above in turn implies that

$$f(y) = \frac{f(0) + 1}{2} \cdot y + c, \quad (6)$$

where the constant c depends on the parity. Assume $c = c_0$ for even x , and $c = c_1$ for odd x . Replacing y with 0 allows us to see $c_0 = f(0)$. For even x , we can rewrite Equation (3) as

$$\frac{f(0) + 1}{2} \cdot (x + 1) + c_1 = \frac{f(0) + 1}{2} \cdot \left(\frac{f(0) + 1}{2} \cdot x + c_0 \right) + c, \quad (7)$$

where c depends on the parity of $\frac{f(0)+1}{2} \cdot x + c_0$. Comparing the coefficient of x on both sides, we get that $f(0) = \pm 1$. However, if $f(0) = -1$, then $f(y)$ would be a constant for each parity of y , contradicting that neither $f(0)$ nor $f(1)$ is the maximum of $f()$. Hence $c_0 = 1$, which implies that $f(x) = x + 1$ for even x , and $f(x) = x + c_1$ for odd x .

For odd x , easy to see

$$x + 2 = f(x + 1) = f(f(x)) = f(x + c_1). \quad (8)$$

The right hand side is equal to $x + c_1 + 1$ if c_1 is odd, and $x + 2c_1$ if c_1 is even. By comparing the constant terms of both sides, we definitely get $c_1 = 1$. Therefore, $f(x) = x + 1$. We can easily check that it satisfies the original equation.

【数学-3】对于正整数 n ，我们定义 $S_n = 1! + 2! + \cdots + n!$ ，又定义集合 $P = \{p | p \text{ 为素数，并且存在正整数 } n \text{ 使得 } p | S_n\}$ 。求证 P 为无限集。

【数学-3 答案】

First we recall a symbol: For a positive integer n and prime p , by $v_p(n)$ we mean the largest k such that $p^k | n$.

For any prime p and positive integer k , for any $n \geq kp$, we always have

$$S_n = S_{kp-1} + (kp)! + \cdots + n! \equiv S_{kp-1} \pmod{p^{v_p((kp)!)}}.$$

Hence, if $v_p(S_{kp-1}) < v_p((kp)!)$, then $v_p(S_n) = v_p(S_{kp-1}) < v_p((kp)!)$; if $v_p(S_{kp-1}) \geq v_p((kp)!)$, then $v_p(S_n) \geq v_p((kp)!)$.

Based on the above observation, now we prove the proposition by contradiction. Assume P is a finite set. We classify the primes $p \in P$ into two categories: type A and type B. We say p is of type A if there is a k such that $v_p(S_{kp-1}) < v_p((kp)!)$. Otherwise, we say p is of type B. Note that for any type A prime p , $v_p(S_n)$ becomes a constant (i.e., does not change as n grows) when n is sufficiently large. So we can choose a large constant N , such that for all type A primes p , $v_p(S_n)$ is a constant when $n \geq N$.

We define q to be the product of all type B primes. Choose a multiple Q of q such that $Q > 2N$. Hence, for any type B prime p , we have $v_p(S_{Q-1}) \geq v_p(Q!)$. Keeping this in mind, consider

$$S_{Q-1} = S_{Q-2} + (Q-p)!(Q-p+1) \cdots (Q-1).$$

Since $v_p((Q-p)!(Q-p+1) \cdots (Q-1)) = v_p((Q-p)!) < v_p(Q!)$, we must have $v_p(S_{Q-2}) = v_p((Q-p)!)$. Since p is of type B, if $p \geq 3$ we also have $v_p(S_{Q-3}) \geq v_p((Q-p)!) \Rightarrow v_p(S_{Q-3}) \geq v_p(S_{Q-2})$. On the other hand, since every S_n is odd, $v_2(S_{Q-3}) = v_2(S_{Q-2})$. For type A primes p , $Q > 2N$ guarantees that $v_p(S_{Q-3}) = v_p(S_{Q-2})$.

Combining all the above, we see that no prime p has a larger value of v_p in S_{Q-2} than in S_{Q-3} , which contradicts that $S_{Q-2} > S_{Q-3}$.

【数学-4】【20 分】在计算机中有一种常用的数据结构叫做数组。一个数组是有顺序的若干个元素组成的序列。例如我们可以定义一个数组 $A[0..2022]$ ，这个数组由 2023 个元素组成： $A[0]$ 、 $A[1]$ 、……、 $A[2022]$ 。类似地，我们又定义另外一个数组 $B[0..2022]$ ，由 2023 个元素组成： $B[0]$ 、 $B[1]$ 、……、 $B[2022]$ 。已知这两个数组的所有元素都是整数，并且满足如下条件：对于任何一个 k ($0 \leq k \leq 2022$)，数组 A 中恰好有 $B[k]$ 个 k ，而数组 B 中恰好有 $A[k]$ 个 k 。又已知 $A[0] < B[0]$ 。求证 $A[2020]=1$ 。

【数学-4 答案】由 A 中有 2023 个元素，可知 B 中所有元素之和不超过 2023。同理， A 中所有元素之和也不超过 2023。假设除了 $B[0]$ 之外数组 B 中有 b 个非 0 元素，也就是 $b = |\{k | B[k] \neq 0, 1 \leq k \leq 2022\}|$ 。我们注意到

$$2023 \geq \sum_{k=0}^{2022} A[k] \geq \sum_{k=0}^{2022} B[k] \cdot k = \sum_{1 \leq k \leq 2022} B[k] \cdot k \geq \sum_{1 \leq k \leq b} B[k] \cdot k \geq \sum_{1 \leq k \leq b} k = \frac{b(b+1)}{2} \geq \frac{b^2}{2}。$$

所以， $b \leq \sqrt{4046} < 64$ 。可见 B 中至少有 $2022-63=1959$ 个 0，因此 $A[0] \geq 1959 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2022} A[k] \leq 2023 - 1959 = 64$ 。采用与上面类似的技巧得

$$64 \geq \sum_{k=1}^{2022} A[k] = \sum_{1 \leq k \leq 2022, k \neq A[0]} B[k] \cdot k \geq \sum_{1 \leq k \leq b-1} B[k] \cdot k \geq \sum_{1 \leq k \leq b-1} k = \frac{b(b-1)}{2}。$$

（上式中第一个等号能成立是因为 $A[0]$ 的值在数组 A 中显然只能出现一次。）重复以上过程多次：

所以， $b \leq \frac{1+\sqrt{128 \times 4+1}}{2} < 12$ 。可见 B 中至少有 $2022-11=2011$ 个 0，因此 $A[0] \geq 2011 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2022} A[k] \leq 2023 - 2011 = 12$ 。于是

$$12 \geq \sum_{k=1}^{2022} A[k] \geq \frac{b(b-1)}{2}。$$

所以， $b \leq \frac{1+\sqrt{24 \times 4+1}}{2} < 6$ 。可见 B 中至少有 $2022-5=2017$ 个 0，因此 $A[0] \geq 2017 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2022} A[k] \leq 2023 - 2017 = 6$ 。于是

$$6 \geq \sum_{k=1}^{2022} A[k] \geq \frac{b(b-1)}{2}。$$

所以， $b \leq \frac{1+\sqrt{12 \times 4+1}}{2} = 4$ 。可见 B 中至少有 $2022-4=2018$ 个 0，因此 $A[0] \geq 2018 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2022} A[k] \leq 2023 - 2018 = 5$ 。于是

$$5 \geq \sum_{k=1}^{2022} A[k] \geq \frac{b(b-1)}{2}。$$

所以， $b \leq \frac{1+\sqrt{10 \times 4+1}}{2} < 4$ 。可见 B 中至少有 $2022-3=2019$ 个 0，因此 $A[0] \geq 2019$ 。由 $B[0] \geq A[0] + 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2022} B[k] \leq 2022 - A[0]$ 。倘若 $B[1]$ 到 $B[2022]$

中有大于等于 2 的元素，那么其中非 0 元素的个数将不超过 $2021-A[0]$ ，也就是说其中至少有 $A[0]+1$ 个 0---矛盾。因此， $B[1]$ 到 $B[2022]$ 中只有 0 和

1。下面分情况讨论：

情况 1: $B[0]=2020$ 。此时 A 中有 2020 个 0 和 3 个非 0 元素, 后者必然是 $A[0]$ 和某两个元素 $A[k]$ 、 $A[j](k>j>0)$ 。因为 $A[0]>2018$, 显然与 $A[k]$ 、 $A[j]$ 都不等。倘若 $A[k]=A[j]$, 则有 $B[A[k]]=2$, 矛盾。因此 $A[k]\neq A[j]$, 于是 $B[A[0]]=B[A[k]]=B[A[j]]=1$, 剩下 2019 个都是 0。于是 $A[0]=2019$, $A[1]=3$, $A[2020]=1$, A 中其它元素均为 0。据此算得 $B[1]=1, B[3]=1, B[2019]=1$, 除了它们以及 $B[0]$ 之外的 2019 个 B 元素均为 0。经过验算, 此解完全符合题设要求。

情况 2: $B[0]=2021$ 。此时 A 中有 2021 个 0 和 2 个非 0 元素, 后者必然是 $A[0]$ 和某个 $A[k](k>0)$ 。因为 $A[0]>2018>A[k]$, 必然有 $B[A[0]]=1, B[A[k]]=1$, B 中剩下 2020 个元素都是 0。这与 $B[0]=2021$ 矛盾。

情况 3: $B[0]=2022$ 。此时 A 中有 2022 个 0 和 1 个非 0 元素, 后者必然是 $A[0]$ 。于是 $A[2022]=0$, 与 B 中有 2022 矛盾。

情况 4: $B[0]=2023$ 。此时 $B[1]$ 到 $B[2022]$ 为全 0, 从而 $A=[2022, 0, 0, \dots, 0]$, 与 $B[0]=2023$ 矛盾。