

2020 信息强基/计算机拔尖选拔考试-综合 1

(算法/物理)

报考志愿 (二选一): 拔尖计划 ☐ 强基计划 ☐

学号:	姓名:	院系:	本卷总分:
算法、物理 二选一	算法原始分:	算法转换分:	
	物理原始分:	物理转换分:	

【注意事项】

- 本卷包含算法、物理两部分, 每部分 40 分。在算法和物理两部分中, 你只需要选做一个。请在下面勾出你的选择:
■ 算法/物理选择: ☐ 选做算法 ☐ 选做物理
- 不勾选, 或者不按照要求勾选的人, 可能会得 0 分。
- 对于二选一科目, 试卷所标的每题分数为原始分。假设你得到原始分 x , 将通过如下公式转换为该科的最终得分 y : $y = \frac{36x}{a}$, 其中 a 是该科目的三个最高原始分的平均分。
- 整个综合部分 (含综合 1、综合 2) 全部考试时间 150 分钟。闭卷考试, 严禁携带任何资料。除了 (非编程) 计算器外, 禁止使用任何电子设备。

第一部分: 算法

【友情提示】算法题不是编程题, 你不需要注意语法细节, 也不需要纠缠程序实现的细节。你只需要清晰地表达自己的思路, 使阅卷者容易理解即可。

【算法-1】【20 分】你得到了一个 n 元一次方程组, 其中共含有 m 个方程。方程的所有系数 (包括所有常数项在内) 都是整数, 且绝对值都不超过 d 。现在需要用算法判断该方程组是否有非负整数解, 算法的时间复杂度要求为 $O((md)^{2m}n)$ 。在你设计算法时, 可以使用下面的 Steinitz 引理。设计完毕后, 需要简要说明算法的时间复杂度为什么满足要求。(考虑到时间有限, 不需要完整地证明时间复杂度满足要求, 只要写出最关键的思路即可。)

引理 (Steinitz): 假设 $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}$ 是 nm 个实数, 它们的绝对值都不超过 d , 并且满足以下条件: 对于任意 j ($1 \leq j \leq m$), $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{nj} = 0$ 。那么, 一定存在 1 到 n 的一个排列 $j_1, \dots, j_n$ 使得对于所有 k ($1 \leq k \leq n$), 所有 h ($1 \leq h \leq m$), 都有 $x_{j_1 h} + x_{j_2 h} + \dots + x_{j_k h} \leq 2md$ 。

【如果不会, 请直接写“放弃”; 胡乱解答误导阅卷老师, 可能会得负分。最低可得-5 分。】

【算法-2】【20 分】我们都知道所谓背包问题：输入为 n 个物品的重量和价值（每个数值都是不超过 2^d 的正整数），以及一个背包的容量 c （也是不超过 2^d 的正整数）。当一组物品的总重量不超过 c 时，它们可以放入背包的；反之，就不能放入背包。输出为能够放入背包的物品总价值的最大值。该问题也可以扩展为所谓双背包问题：输入仍然保持不变，只是一个背包变成了容量完全相同的两个背包。输出为能够放入这两个背包的物品总价值的最大值。

不管是背包问题，还是双背包问题，都没有任何已知的算法可以在 $O(\text{poly}(nd))$ 时间内解决（这里 $\text{poly}(nd)$ 是指 nd 的任意多项式）。现在假设我们有一个来自外星球的算法 F ，可以在 $O(n^4 d^4)$ 时间内解决背包问题。我们只能调用它，但无法知道它内部是如何运作的。请你设计一个利用 F 的算法，在 $O(\text{poly}(nd))$ 时间内近似地解决双背包问题——你的算法的输出必须不超过精确解的 1.5 倍。你的算法调用 F 的次数限制为常数次（即 $O(1)$ 次）。设计完算法后，请简要说明为什么输出不会超过精确解的 1.5 倍。

【直接写“放弃”可以得 2 分；完全做错可能会得 0 分。故意写伪证误导阅卷老师，可能会被倒扣分。】

第二部分：物理

【物理-1】【5分】很多种高能物理学理论中都预言了一种叫做强子的粒子的存在，每个强子都带有电荷 $Q>0$ 和磁荷 $M>0$ 。强子的磁场中，每点的磁场方向都恰好是背离强子的那个方向，并且磁感应强度 $B = \frac{M\mu_0}{4\pi R^2}$ ，这里 μ_0 是磁常数， R 是该点到强子的距离。假设有一个质量为 m ，电量绝对值为 q 的轻粒子进入了一个很重的强子的电磁场内，然后开始做匀速圆周运动，速率为 v （远小于光速 c ）。那么，该圆周的半径为_____（用 Q 、 M 、 μ_0 、 m 、 q 、 v 、 c 和其它一些常数表示）。

【物理-2】【5分】如图-物理 2 所示，有一个西瓜浸泡在水桶里。我们需要根据该图对西瓜的密度进行估算。在估算中，假设西瓜是一个均匀的球体，而且我们既不考虑光在水-空气界面上发生的折射，也不考虑西瓜各部分与照相机之间的距离不等造成的成像大小差异。在此模型中，可得西瓜的密度为_____。



图-物理 2

【物理-3】【5分】当物体受到外力作用时，物体内部的一些截面上会产生相应的内力作用。这个内力的大小与截面的面积有关。假设某截面上一块面积为 A 的区域上，平均内力为 f ；那么当 A 趋近于0（区域缩成一个点）时， f 的极限就称为该截面上该点处的应力 p 。也就是说， $p = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{f}{A}$ 。现在考虑一个由特种钢（密度8吨/立方米）制成的圆筒形锅炉，锅炉高1.5米，外直径3米，质量4吨。锅炉外为空气，气压10万帕斯卡。锅炉内为水蒸气，压强1000万帕斯卡。在离锅炉底部1米的高度，作炉壁的横截面，设该横截面上的 P 点处的应力为 σ 。过 P 点和锅炉的中轴线作一个纵截面，设该纵截面上 P 点处的应力为 σ' 。经过计算可以得到， $\sigma'/\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【物理-4】 【5 分】某理想气体的热力学过程如图-物理 4 所示，则其热机效率为_____。

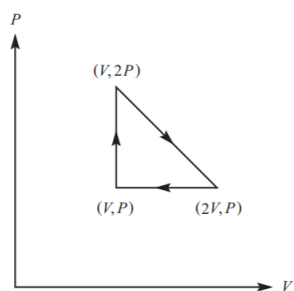


图-物理 4

【物理-5】【10 分】如图-物理 5 所示，一根（质量未必均匀分布的）棒子被两根橡皮筋系在两端，悬挂起来。橡皮筋很细，而且方向为竖直。现在突然剪断左边的橡皮筋，那么棒子的质量分布需要满足什么条件，才会使得棒子右边的端点获得一个竖直向上的加速度？

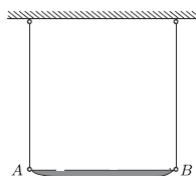


图-物理 5

【物理-6】【10 分】物体对于热量的传导服从所谓傅里叶定律：

$$\dot{Q} = -\frac{\kappa A(T_2 - T_1)}{D}$$

这里 T_1 和 T_2 分别是两个位置的温度， A 是在两个位置之间传导热量经过的截面积， D 是热传导经过的路径长度， κ 是热传导系数， $\dot{Q}$ 则是热流量（单位时间内传导的热量），负号则表示热量传导的方向是从高温到低温。现在有一个管道系统，由绝热材料（热传导系数极低，接近于 0）、材料 A（热传导系数为 k ）、材料 B（热传导系数为 $2k$ ）、石墨烯（热传导系数远大于 k ）组成。该系统中有两部分管道，其截面分别如图物理-6 所示，每部分管道的长度都是 L 。同样如图所示，管道系统还连接到一个多层的球体。该球体内球半径为 $r = \frac{L}{\ln 2}$ ，由石墨烯制成，连接到第一部分管道的石墨烯；内球外面是一层材料 A 制成的中层球壳，该球壳的外半径为 $2r$ ；中层球壳之外则是石墨烯制成的外层球壳，外半径为 $4r$ ，连接到第二部分管道的石墨烯。外层球壳之外则完全被绝热材料所包裹。当外界环境温度为 T_2 ，而两部分管道内温度为 T_1 时，从管道内传导到外界环境的热流量是多少？（由于 r 是依赖于 L 的，答案中请勿出现 r ）

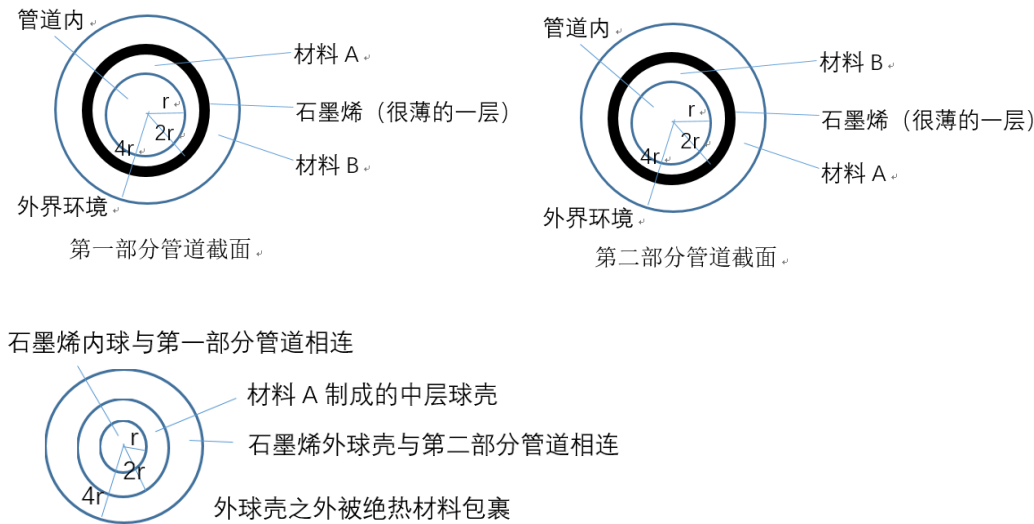


图-物理 6

