

2021 计算机拔尖选拔—主观题（数学部分）

总分 80 分，答题时间 130 分钟

【如果不会，请直接写“放弃”，每题可得 2 分；写伪证误导阅卷老师，得 0 分甚至负分】

【数学-1】【20 分】假设 n 是一个大于 1 的自然数。我们写出 $n-1$ 个分数 $1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$ ，并且将它们全部化简为最简分数。把这些最简分数的分子全部加起来，得到的和记为 $f(n)$ 。对于哪些 n 来说， $f(n)$ 和 $f(2021n)$ 这两个数中有一个奇数，另外一个则是偶数？请严格证明你的结论。

【数学-2】【20 分】8 行 8 列的方格表共有 64 个格子，我们在每个格子里面放一个人。这个人可以是好人，也可以是骗子。每个好人都永远说真话，而每个骗子则永远说假话。但有趣的是，这 64 个人全都说了同一句话：“我所在的列里面骗子的数量比我所在的行里面要多。”请问共有多少种不同的放人的方法，使得以上事实能够成立？

【数学-3】【20 分】对任意正整数 x ，我们分解质因数得到 $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ 。如果 $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 是偶数（包括 0），那么我们就说 x 是平衡的；否则， x 就是不平衡的。现在，考虑正整数 a 和 b ，使用它们来定义函数 $f(x) = (x+a)(x+b)$ 。首先，请证明：存在 $a \neq b$ ，使得 $f(1), f(2), \dots, f(99)$ 都是平衡的。其次，请证明：倘若对于所有正整数 x 而言， $f(x)$ 都是平衡的，则一定有 $a = b$ 。

【数学-4】【20 分】假设 N 是一个不小于 4 的整数。某个游戏有 $2N$ 个参与者（包括 N 个人类和 N 个机器人），他们排成一个圆圈。定义两个机器人之间的朋友关系如下：（1）如果两个机器人之间只有不超过 1 个参与者，那么这两个机器人是朋友。（2）如果两个机器人之间恰有 2 个参与者，并且在他们之间的 2 个参与者中至少有 1 个是人类，那么我们也认为这两个机器人是朋友。（3）除了以上两种情况之外，任意两个机器人都不是朋友。求证：一定能找到 N 对机器人，彼此互为朋友。